ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

CONCOURS D'ADMISSION 1979

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures - Coefficient : 5
(Coef. G/H : 4)

- PROBLEME I -

Trois enfants A, B et C jouent avec une balle.

Lorsque A a la balle, la probabilité pour qu'il l'envoie à B est 0,75 et la probabilité pour qu'il l'envoie à C est 0,25.

Lorsque B a la balle il l'envoie respectivement à A et à C avec les probabilités 0,75 et 0,25.

C envoie toujours la balle à B.

On désigne respectivement par A_n , B_n , C_n les probabilités pour qu'à l'issue du $n^{ième}$ lancer ce soit A , B ou C qui ait la balle.

1°) Montrer qu'il existe une matrice carrée d'ordre 3 que l'on notera M , telle que

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix}$$

2°) Déterminer les valeurs propres de la matrice M ainsi que les vecteurs propres associés.

3°) En déduire que $M = PDP^{-1}$
où D est une matrice diagonale et P une matrice que l'on déterminera

4°) En déduire la matrice M^n

5°) Calculer les limites lorsque n tend vers l'infini des probabilités A_n , B_n , C_n . On vérifiera que ces limites sont indépendantes de l'enfant qui avait la balle au début du jeu.

- PROBLEME II -

Soit F l'ensemble des fonctions numériques à valeurs réelles, définies et continues sur l'intervalle $[-1,+1]$, et f et g deux éléments de F.

Soit M la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel k, associe le maximum des valeurs prises par la fonction f + kg sur l'intervalle $[-1,+1]$.

On désignera par E(k) l'ensemble des x de l'intervalle $[-1,+1]$ pour lesquels la fonction f + kg atteint son maximum.

1°) Déterminer explicitement les fonctions M_1 et M_2 associées respectivement aux fonctions f_1 et g_1 d'une part, et aux fonctions f_2 et g_2 d'autre part avec

$$f_1(x) = (1 - x^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad g_1(x) = x$$

$$f_2(x) = x^4 - 2x^2 \quad \text{et} \quad g_2(x) = 4x^2$$

2°) Montrer que la fonction M_2 définie ci-dessus n'est pas dérivable pour une valeur x_0 que l'on déterminera.

3°) Déterminer les ensembles $E_1(k)$ et $E_2(k)$ associés respectivement aux fonctions $f_1 + kg_1$ et $f_2 + kg_2$

(Pour $E_2(k)$ on distinguera 3 cas selon les valeurs de k .)

4°) On suppose dans cette question que $g(x) = x$.

Montrer qu'il existe une fonction f unique de F vérifiant les trois conditions suivantes :

(1) f est dérivable en tout point de $]-1,+1[$

(2) $f(0)=0$

(3) $\forall u \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$, $E(u) = \sin u$

5°) Soient deux réels u et v, et deux fonctions f et g quelconques de F .

Soient d'autre part x un élément de E(u) et y un élément de E(v) .

Montrer que $(v-u).g(x) \leqslant M(v) - M(u) \leqslant (v-u).g(y)$

En déduire que la fonction M est une fonction continue.

Note : Si $f(x) = x \text{ Arc sin } x + \sqrt{1 - x^2}$ alors $f'(x) = \text{Arc sin } x$

.../...

- PROBLEME III -

Soit f_n la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot x^{-n} & \text{si} \quad x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

où n désigne un entier naturel.

1°) Montrer que cette fonction est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ quel que soit n.

2°) Etudier les variations de f_n et construire sa représentation graphique.

3°) Montrer que l'intégrale $I_n = \int_0^{\infty} f_n(x)\,dx$ a un sens pour tout $n > 1$.

(On pourra étudier séparément $\int_0^1 f_n(x).dx$ et $\int_1^{\infty} f_n(x).dx$)

4°) Calculer I_n en fonction de n.

- PROBLEME IV -

1°) Soit Z le nombre complexe $\dfrac{-1 + i}{4}$

a) Ecrire Z sous forme trigonométrique

b) Calculer les racines cubiques de Z que l'on écrira sous forme trigonométrique.

c) Montrer qu'une seule de ces racines a une puissance quatrième réelle.

2°) Déterminer les réels a et b et les nombres complexes λ et μ pour que l'on ait, quel que soit le nombre complexe z

$$z^4 + \lambda z^3 + \mu z^2 - (1 - i)z - \frac{1}{4} = (z + a + ib)^4$$

FIN

ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

Fondée en 1949 — Reconnue par l'Etat
Diplôme visé par le Ministère des Universités
1, Rue Bougainville — 75007 PARIS
551 32-59 ● 705 99 21

CONCOURS D'ADMISSION

SESSION DE MAI 1979

MATHEMATIQUES 2ème EPREUVE

DURÉE 2H - COEFFICIENT 2

Exercice 1

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers rationnels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$.

Soient $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$.
On pose :

$$f(x,y) = x_1y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

On considère $\mathbb{Z}^n$ comme sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}^n$.

1°) Soit ϕ l'homomorphisme canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un élément de $\mathbb{Z}^n$, on pose

$$\theta(x) = \phi(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Montrer que θ est un homomorphisme de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
Déterminer son noyau K et son image.
Quel est le nombre d'éléments du groupe $\mathbb{Z}^n/K$?

2°) Montrer que K est l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}^n$ tels que f(x, x) soit pair, et aussi le sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ engendré par les vecteurs

$$e_i - e_n, \qquad e_i + e_n \qquad (1 \leqslant i \leqslant n - 1).$$

.../...

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail